Lógica

Deducción natural

Damiano Zanardini

Graduado/a en Ingeniería Informática
Facultad de Informática
Universidad Politécnica de Madrid
damiano@fi.upm.es

Curso Académico 2010/2011

Un cálculo entre otros

Por qué un cálculo deductivo

- es difícil determinar $\Gamma \models F$ *por medios semánticos*
  - en lógica proposicional, hay que estudiar un número muy grande (exponencial) de valoraciones
  - en la lógica de primer orden, ni siquiera con esto bastaría
- como alternativa, deducir *por medios sintácticos*
  - razonar sobre la forma de las fórmulas

Un cálculo entre otros

Tipologías de cálculos

- axiomáticos
- de secuentes
- de tablas analíticas
- de deducción natural

En todo caso

- se requiere que el cálculo sea correcto y completo

Un cálculo entre otros

Deducción natural

- sin axiomas lógicos
- con dos reglas de inferencia para cada conectiva
  - introducción
  - eliminación
- con supuestos

La sintaxis de una demostración: $T[p \longrightarrow q, r \wedge \neg q] \vdash r \wedge \neg p$

1:	$p \longrightarrow q$	premisa
2:	$r \wedge \neg q$	premisa
3:	$\neg q$	$\wedge_{elim2}(2)$
4:	$\neg p$	MT(1,3)
5:	r	$\wedge_{elim2}(2)$
6:	$r \wedge \neg p$	$\wedge_{intro}(4,5)$

Un cálculo entre otros

Metavariables

- vamos a usar F y G que no son símbolos de proposición: son variables *sobre fórmulas del lenguaje*
- mediante metavariables podemos razonar sobre conjuntos (infinitos) de fórmulas que comparten una misma forma lógica
- por ejemplo: $\neg F \wedge F$ agrupa
  - $\neg p \wedge p$; $\neg q \wedge q$; $\neg r \wedge r$; ...
  - $\neg(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow q)$; $\neg(q \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$; $\neg(r \rightarrow s) \wedge (r \rightarrow s)$; ...
  - $\neg(p \vee q) \wedge (p \vee q)$; $\neg(q \vee r) \wedge (q \vee r)$; $\neg(r \vee s) \wedge (r \vee s)$; ...

El cálculo, en detalle: las 10 reglas

Conjunción

- introducción

$$[\wedge_{intro}] \ \frac{F \qquad G}{F \wedge G}$$

- eliminación

$$[\wedge_{elim1}] \ \frac{F \wedge G}{F} \qquad\qquad [\wedge_{elim2}] \ \frac{F \wedge G}{G}$$

$T[p, \quad q] \vdash p \wedge q$

1:	p	premisa
2:	q	premisa
3:	$p \wedge q$	$\wedge_{intro}(1,2)$

El cálculo, en detalle: las 10 reglas

Conjunción

- introducción

$$[\wedge_{intro}]\ \frac{F \qquad G}{F \wedge G}$$

- eliminación

$$[\wedge_{elim1}]\ \frac{F \wedge G}{F} \qquad\qquad [\wedge_{elim2}]\ \frac{F \wedge G}{G}$$

$T[p \wedge q, \quad r] \vdash p$

1:	$p \wedge q$	premisa
2:	p	$\wedge_{elim}(1)$

El cálculo, en detalle: las 10 reglas

Disyunción

- introducción

$$[\vee_{intro1}] \ \frac{F}{F \vee G} \qquad\qquad [\vee_{intro2}] \ \frac{G}{F \vee G}$$

- eliminación

$$[\vee_{elim}] \ \frac{F \rightarrow H \qquad G \rightarrow H \qquad F \vee G}{H}$$

$T[s \wedge (p \vee q), \quad p \rightarrow \neg r, \quad q \rightarrow \neg r] \vdash s \wedge \neg r$

1:	$s \wedge (p \vee q)$	premisa
2:	$p \vee q$	$\wedge_{elim}(1)$
3:	$p \rightarrow \neg r$	premisa
4:	$q \rightarrow \neg r$	premisa
5:	$\neg r$	$\vee_{elim}(2{,}3{,}4)$
6:	s	$\wedge_{elim}(1)$
7:	$s \wedge \neg r$	$\wedge_{intro}(5{,}6)$

El cálculo, en detalle: las 10 reglas

Disyunción

- introducción

$$[\vee_{intro1}]\ \frac{F}{F \vee G} \qquad\qquad [\vee_{intro2}]\ \frac{G}{F \vee G}$$

- eliminación

$$[\vee_{elim}]\ \frac{F \to H \qquad G \to H \qquad F \vee G}{H}$$

$T[\neg s,\quad p \wedge (q \vee r)] \vdash p \vee s$

1:	$p \wedge (q \vee r)$	premisa
2:	p	$\wedge_{elim}(1)$
3:	$p \vee s$	$\vee_{intro}(2)$

El cálculo, en detalle: las 10 reglas

Negación

- introducción

$$[\neg_{intro}]\ \frac{F \rightarrow G \wedge \neg G}{\neg F}$$

- eliminación

$$[\neg_{elim}]\ \frac{\neg\neg F}{F}$$

$T[\neg p \rightarrow q \wedge \neg q)] \vdash p$

1:	$\neg p \rightarrow q \wedge \neg q$	premisa
2:	$\neg\neg p$	$\neg_{intro}(1)$
3:	p	$\neg_{elim}(2)$

El cálculo, en detalle: las 10 reglas

Implicación

- introducción

$$[\rightarrow_{intro}] \ \frac{F(\text{supuesto}) \qquad G}{F \rightarrow G}$$

- eliminación

$$[\rightarrow_{elim}] \ \frac{F \rightarrow G \qquad F}{G}$$

$T[p \rightarrow q, \quad q \rightarrow r, \quad p] \vdash r$

1:	$p \rightarrow q$	premisa
2:	p	premisa
3:	q	$\rightarrow_{elim}(1,2)$
4:	$q \rightarrow r$	premisa
5:	r	$\rightarrow_{elim}(3,4)$

El cálculo, en detalle: las 10 reglas

Implicación

- introducción

$$[\rightarrow_{intro}]\ \frac{F(\text{supuesto}) \qquad G}{F \rightarrow G}$$

- eliminación

$$[\rightarrow_{elim}]\ \frac{F \rightarrow G \qquad F}{G}$$

$T[p \rightarrow q, \quad q \rightarrow r] \vdash p \rightarrow r$

1:	$p \rightarrow q$	premisa
2:	$q \rightarrow r$	premisa
3:	p	supuesto
4:	q	$\rightarrow_{elim}(1,3)$
5:	r	$\rightarrow_{elim}(2,4)$
6:	$p \rightarrow r$	$\rightarrow_{intro}(3\text{-}5)$

El cálculo, en detalle: las 10 reglas

Doble implicación

- introducción

$$[\leftrightarrow_{intro}]\ \frac{F \rightarrow G \qquad G \rightarrow F}{F \leftrightarrow G}$$

- eliminación

$$[\leftrightarrow_{elim1}]\ \frac{F \leftrightarrow G}{F \rightarrow G} \qquad [\leftrightarrow_{elim2}]\ \frac{F \leftrightarrow G}{G \rightarrow F}$$

$T[p \rightarrow \neg r, \quad \neg r \rightarrow p] \vdash p \leftrightarrow \neg r$

1:	$p \rightarrow \neg r$	premisa
2:	$\neg r \rightarrow p$	premisa
3:	$p \leftrightarrow \neg r$	$\leftrightarrow_{intro}(1,2)$

El cálculo, en detalle: las 10 reglas

Doble implicación

- introducción

$$[\leftrightarrow_{intro}]\ \frac{F \rightarrow G \qquad G \rightarrow F}{F \leftrightarrow G}$$

- eliminación

$$[\leftrightarrow_{elim1}]\ \frac{F \leftrightarrow G}{F \rightarrow G} \qquad [\leftrightarrow_{elim2}]\ \frac{F \leftrightarrow G}{G \rightarrow F}$$

$T[p \leftrightarrow (q \wedge r),\ \ p] \vdash r$

1:	$p \leftrightarrow (q \wedge r)$	premisa
2:	$p \rightarrow (q \wedge r)$	$\leftrightarrow_{elim1}(1)$
3:	p	premisa
4:	$q \wedge r$	$\rightarrow_{elim}(2,3)$
5:	r	$\wedge_{elim}(4)$

El cálculo, en detalle: las 10 reglas

Notación

- se puede omitir el nombre de la regla que se usa, specificando únicamente las fórmulas a las que se aplica
- cuando se introduce un supuesto hay que mover la siguiente secuencia de fórmulas hacia la derecha, hasta descargar el supuesto con $\rightarrow_{intro}$

$T[p \rightarrow (q \wedge r \rightarrow s), \quad r] \vdash p \rightarrow q \rightarrow s$

1:	$p \rightarrow (q \wedge r \rightarrow s)$	premisa
2:	$\quad p$	supuesto
3:	$\quad q \wedge r \rightarrow s$	(1,2)
4:	$\quad\quad q$	supuesto
5:	$\quad\quad r$	premisa
6:	$\quad\quad q \wedge r$	(4,5)
7:	$\quad\quad s$	(3,6)
8:	$\quad q \rightarrow s$	(4-7)
9:	$p \rightarrow q \rightarrow s$	(2-8)

El cálculo, en detalle: las 10 reglas

Premisas, supuestos y teorema de deducción

- los ejemplos de las reglas de $\rightarrow$ han sido muy claros
- ni las premisa ni los supuestos requieren demostración, pero
  - una premisa se añade permanentemente a la teoría básica (de ahí $T[\Gamma]$)
  - un supuesto se introduce en un punto de la demostración y se cancela (descarga) en otro punto posterior
- lo que significa usar un supuesto es lo siguiente:
  - "pongamos que F"
  - "entonces demuestro (usando F) que G"
  - "en realidad acabo de mostrar que *si tuviera F como premisa, entonces podría demostrar G*"
  - "por el teorema de tautología, eso equivale a decir que he demostrado la implicación $F \rightarrow G$ (sin premisas)"

Ejemplos

1. $T[p] \vdash q \to p$
2. $T[p \to (q \to r)] \vdash (p \to q) \to (p \to r)$
3. $T[\neg p \to \neg q] \vdash (\neg p \to q) \to p$
4. $T[\neg p \to \neg q] \vdash q \to p$
5. $T[p \to q, q \to r] \vdash p \to r$
6. $T[p \to (q \to r), q] \vdash p \to r$
7. $T[p \wedge q \to r, r \wedge s \to t] \vdash p \wedge q \wedge s \to t$
8. $T[p \wedge q \to r] \vdash p \wedge \neg r \to \neg q$
9. $T[p \vee q \to r, s \to p] \vdash s \to r$
10. $T[p \wedge q \to r, \neg(p \vee r) \to s, p \to q] \vdash \neg s \to r$
11. $T[p \vee p] \vdash p$
12. $T[p] \vdash \neg\neg p$
13. $T[p \vee q \to r] \vdash q \to r$

Reglas derivadas

Las herramientas que tenemos

- practicando un poco con la deducción natural nos damos cuenta de que las demostraciones
  - pueden ser bastante largas
  - contienen unos patrones que se repiten a menudo
- entonces lo que se nos puede ocurrir es añadir unas *reglas derivadas* que acorten las demostraciones

Reglas derivadas

$T[r \rightarrow (q \wedge s),\quad \neg(q \wedge s)] \vdash \neg r$

1:	$r \rightarrow (q \wedge s)$	premisa
2:	$\neg(q \wedge s)$	premisa
3:	$\quad r$	supuesto
4:	$\quad q \wedge s$	(1,3)
5:	$\quad q \wedge s \wedge \neg(q \wedge s)$	(2,4)
6:	$r \rightarrow (q \wedge s) \wedge \neg(q \wedge s)$	(3-5)
7:	$\neg r$	(6)

$T[p \rightarrow q,\quad r \wedge \neg q] \vdash r \wedge \neg p$

1:	$p \rightarrow q$	premisa
2:	$r \wedge \neg q$	premisa
3:	$\neg q$	(2)
4:	$\quad p$	supuesto
5:	$\quad q$	(1,4)
6:	$\quad q \wedge \neg q$	(3,5)
7:	$p \rightarrow (q \wedge \neg q)$	(4-6)
8:	$\neg p$	(7)
9:	r	(2)
10:	$r \wedge \neg p$	(8,9)

Reglas derivadas

Una nueva regla

- podríamos acortar las dos demostraciones si tuvieramos una regla de carácter general:

$$[MT]\ \frac{F \rightarrow G \qquad \neg G}{\neg F}$$

- en este ejemplo, la regla es bien conocida y se llama *MODUS TOLLENS*
- el nombre latín lo tiene también $\rightarrow_{elim}$, que se llama *MODUS PONENS*
- las dos reglas se conocen y se usan desde hace siglos

Reglas derivadas

Ojo

- si quiero introducir una nueva regla, tengo que dar una justificación, y (en este curso) tengo al menos dos caminos

la vía "de la confianza"

- demostrar el resultado con las tablas de verdad *para proposiciones* (en este caso: que $\neg p$ es consecuencia lógica de $\{p \rightarrow q, \neg q\}$)
- invocar un *teorema de sustitución* (amablemente demostrado por otros) para poder decir que el resultado es válido para cualquier fórmula (en este caso: que $\neg F$ es consecuencia lógica de $\{F \rightarrow G, \neg G\}$ para toda F y G)
- usar el hecho (también demostrado por otros) que la deducción natural es correcta y completa para pasar del nivel "consequencia lógica" al nivel "deducibilidad"

Reglas derivadas

Ojo

- si quiero introducir una nueva regla, tengo que dar una justificación, y (en este curso) tengo al menos dos caminos

la vía lógica pura y dura

- demostrarlo directamente en deducción natural, con una *demostración con metavariables* (en este caso: de $T[F \rightarrow G, \neg G] \vdash \neg F$)

1:	$F \rightarrow G$	premisa
2:	$\neg G$	premisa
3:	$\quad F$	supuesto
4:	$\quad G$	(1,3)
5:	$\quad G \wedge \neg G$	(2,4)
6:	$F \rightarrow (G \wedge \neg G)$	(2-5)
7:	$\neg F$	(6)

Reglas derivadas

Ojo

- si quiero introducir una nueva regla, tengo que dar una justificación, y (en este curso) tengo al menos dos caminos

la vía lógica pura y dura

- demostrarlo directamente en deducción natural, con una *demostración con metavariables* (en este caso: de $T[F \rightarrow G, \neg G] \vdash \neg F$)
- también hay que apoyarse en un teorema de sustitución
- y también, si todo esto tiene que tener un sentido, hay que suponer la corrección y completitud del cálculo

Reglas derivadas

Algunas reglas derivadas

$$[\mathit{transitividad}]\ \frac{F \rightarrow G \qquad G \rightarrow H}{F \rightarrow H} \qquad [\mathit{transitividad}]\ \frac{F \leftrightarrow G \qquad G \leftrightarrow H}{F \leftrightarrow H}$$

$$[\mathit{modusTollens}]\ \frac{F \rightarrow G \qquad \neg G}{\neg F}$$

$$[\mathit{asociatividad}]\ \frac{(F \vee G) \vee H}{F \vee (G \vee H)} \qquad [\mathit{asociatividad}]\ \frac{(F \wedge G) \wedge H}{F \wedge (G \wedge H)}$$

$$[\mathit{asociatividad}]\ \frac{F \vee (G \vee H)}{(F \vee G) \vee H} \qquad [\mathit{asociatividad}]\ \frac{F \wedge (G \wedge H)}{(F \wedge G) \wedge H}$$

$$[\mathit{conmutatividad}]\ \frac{F \vee G}{G \vee F} \qquad [\mathit{conmutatividad}]\ \frac{F \wedge G}{G \wedge F}$$

Reglas derivadas

Algunas reglas derivadas

$$[deMorgan]\ \frac{\neg(F \wedge G)}{\neg F \vee \neg G} \qquad [deMorgan]\ \frac{\neg(F \vee G)}{\neg F \wedge \neg G}$$

$$[deMorgan]\ \frac{\neg F \vee \neg G}{\neg(F \wedge G)} \qquad [deMorgan]\ \frac{\neg F \wedge \neg G}{\neg(F \vee G)}$$

$$[corte]\ \frac{F \vee G \qquad \neg F}{G} \qquad [corte]\ \frac{F \vee G \qquad \neg G}{F}$$

$$[corte]\ \frac{F \vee G \qquad H \vee \neg F}{G \vee H}$$

$$[implicación]\ \frac{F \rightarrow G}{\neg F \vee G} \qquad [implicación]\ \frac{\neg F \vee G}{F \rightarrow G}$$

Reglas derivadas

Intercambio

- ya vimos el teorema de sustitución
- de una fórmula F y de la equivalencia $G \leftrightarrow H$ se deduce F' que resulta de sustituir en F todos los G por H

$T[p \leftrightarrow r, \quad q \rightarrow s, \quad s \rightarrow t \wedge r] \vdash q \rightarrow p \wedge t$

1:	$q \rightarrow s$	premisa
2:	$s \rightarrow t \wedge r$	premisa
3:	q	supuesto
4:	s	(1,3)
5:	$t \wedge r$	(2,4)
6:	$p \leftrightarrow r$	premisa
7:	$t \wedge p$	intercambio(5,6)
8:	$p \wedge t$	conmutatividad(7)
9:	$q \rightarrow p \wedge t$	(3-8)

Reglas derivadas

Las herramientas que tenemos: conclusión

- las 10 reglas básicas
- las reglas derivadas que acabamos de introducir
- el intercambio (que resume unas cuantas reglas)
- y nada más
- también puede ser que se os pida demostrar algo *sin usar las reglas derivadas*

Reglas derivadas

Acuerdos de notación

- la forma gráfica de una demostración tiene que ser como en estas trasparencias
- el enunciado del teorema se puede separar de la demostración por medio de una linea horizontal

$$
\begin{array}{lll}
\multicolumn{3}{l}{T[p \leftrightarrow r, \quad q \rightarrow s, \quad s \rightarrow t \wedge r] \vdash q \rightarrow p \wedge t} \\
\hline
1: & q \rightarrow s & \text{premisa} \\
 & \ldots & \\
8: & \quad p \wedge t & \text{conmutatividad(7)} \\
9: & q \rightarrow p \wedge t & \text{(3-8)}
\end{array}
$$

- hay que declarar siempre premisas y supuestos
- cuándo esté claro, se puede omitir el nombre de las reglas usadas, pero nunca se omita los pasos de la demostración a los que una regla se aplica
- si una fórmula ya apareció en la demostración no hace falta repetirla; pero, si aparece dentro del bloque que corresponde a un supuesto, entonces no se puede usar después de este bloque

Acuerdos de notación

- si la demostración sale muy larga, se puede separar demostrando un resultado parcial y luego usándolo en el resto

$T[p \to q] \vdash \neg p \vee q$

	...	
n:	$\neg q \to \neg p \vee q$	(2-(n-1))
	...	
n':	$q \to \neg p \vee q$	((n+1)-(n'-1))
n'+1:	$q \vee \neg q$	"tau"
n'+2:	$\neg p \vee q$	(n,n',n'+1)

"tau": $T \vdash q \vee \neg q$

	...
m:	$q \vee \neg q$

- el símbolo o nombre que se usa (paso n'+1) en la demostración principal (*teorema*) tiene que refirirse claramente al "nombre" de la demostración secundaria (*lema*)

☞ las premisas del lema tienen que estar contenidas en las del teorema

Más ejemplos

1. $T[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \vdash q \rightarrow (p \rightarrow r)$
2. $T[p \rightarrow q] \vdash p \vee r \rightarrow q \vee r$
3. $T[\neg q \rightarrow r, \quad t \rightarrow \neg q, \quad \neg s \rightarrow \neg q] \vdash t \vee \neg s \rightarrow r$
4. $T[p \vee (q \rightarrow r) \rightarrow q, \quad p] \vdash q$
5. $T[\neg p \rightarrow \neg s, \quad \neg p \vee r, \quad r \rightarrow \neg t] \vdash \neg s \vee \neg t$
6. $T[(p \rightarrow q) \wedge t, \quad (r \vee p) \wedge \neg q, \quad \neg t \leftrightarrow \neg s] \vdash r \wedge s$

Más ejemplos

1. $T \vdash p \wedge q \rightarrow p$
2. $T \vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$
3. $T \vdash (p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$
4. $T \vdash (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$
5. $T \vdash \neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
6. $T \vdash (p \rightarrow \neg q) \wedge \neg(r \wedge \neg p) \rightarrow (q \rightarrow \neg r)$
7. $T \vdash (p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$
8. $T \vdash \neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow p \wedge \neg q$
9. $T \vdash p \rightarrow (q \wedge \neg q \rightarrow \neg p)$
10. $T \vdash (p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q \wedge r))$
11. $T[(\neg p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q)] \vdash p$